

## TP N° 1 : INTRODUCTION AUX TRAVAUX PRATIQUES : MESURES ET INCERTITUDES

### I. Erreur absolue, erreur relative.

#### 1. Exemple.

Soit  $S_e$  la somme exacte que possède une personne.  
 Soit  $S_a$  la somme approchée comptée rapidement et arrondie.

	$S_e$ en francs	$S_a$ en francs	erreur absolue : $(S_a - S_e)$	erreur relative : $(S_a - S_e) / S_e \approx (S_a - S_e) / S_a$
1 <sup>er</sup> exemple	99	100		
2 <sup>ème</sup> exemple	101	100		

#### 2. Généralisation.

Soit une grandeur  $X$  de valeur exacte  $X_e$ , dont la valeur approchée est  $X_a$ .  
 L'erreur absolue sur  $X$  est  $(X_a - X_e)$ , c'est une grandeur algébrique.  
 L'erreur relative sur  $X$  est  $(X_a - X_e) / X_e \approx (X_a - X_e) / X_a$ , c'est une grandeur algébrique.

### II. Incertitude absolue, incertitude relative.

En physique, nous ne possédons jamais la valeur exacte  $X_e$  d'une grandeur. Les valeurs sont obtenues expérimentalement donc sont approchées, soit  $X_a$ .

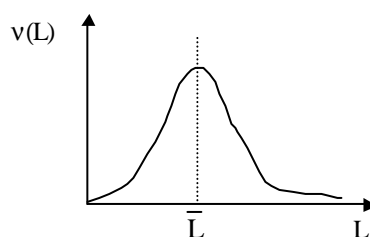
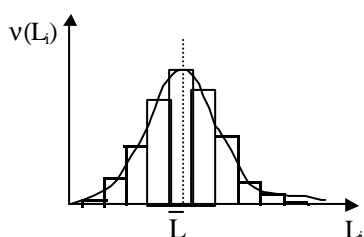
#### 1. Les appareils de mesure.

- Ils doivent être *fidèles* (aptitude à indiquer la même valeur lorsqu'on recommence la même mesure).
- Ils doivent être *justes* (voir II. 3.).
- Ils doivent être *sensibles* (pour les appareils de mesure électrique analogiques (à aiguille) : finesse de la graduation par exemple).  
 L'appareil doit être adapté à la mesure (il ne nous viendrait pas à l'idée de prendre une règle graduée pour mesurer le diamètre d'une tête d'épingle !).
- L'appareil doit être utilisé correctement (choisir le bon calibre lorsqu'on utilise un appareil de mesure électrique (voir ci-dessous la définition du calibre)).

#### 2. Etude statistique.

On se propose de mesurer la longueur  $L$  d'une paillasse de physique à l'aide d'un mètre ruban métallique.  
 En répétant la mesure  $N$  fois on obtient la série de résultats  $L_1, L_2, \dots, L_1, \dots, L_N$ .

- La valeur moyenne est  $\bar{L} = \frac{1}{N} (L_1 + L_2 + \dots + L_N) = \frac{1}{N} \sum_i L_i$ .
- La variance est  $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i (L_i - \bar{L})^2 > 0$ .
- L'écart-type ou écart quadratique moyen est  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} > 0$ .  
 Les calculettes ont un programme de calcul de l'écart-type  $\sigma$ .
- L'histogramme est le graphe obtenu en portant les résultats  $L_i$  en abscisses et la fréquence  $v(L_i)$  d'obtention de ces résultats en ordonnée : il a une structure discontinue, sensiblement symétrique avec une forte accumulation vers la valeur moyenne.
- La courbe continue associée à l'histogramme est sensiblement une courbe de Gauss et on démontre en théorie statistique que le résultat a 96 chances sur 100 de se trouver dans l'intervalle  $[\bar{L} - \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{L} + \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}]$ . On énonce :  $L = \bar{L} \pm \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$ .



• L'incertitude absolue statistique est  $\Delta L = \frac{2\sigma}{\sqrt{N}}$ , c'est une grandeur positive. Le résultat s'énonce  $L = \bar{L} \pm \Delta L$ .

• L'incertitude relative ou « précision » est  $\frac{\Delta L}{L}$ , c'est une grandeur positive.

Plus  $\frac{\Delta L}{L} = \frac{2\sigma}{L\sqrt{N}}$  est petit, plus la précision est grande : la précision est d'autant meilleure que l'on augmente le nombre de mesures N.

3. Précision et justesse.

On se propose de déterminer la fréquence de résonance d'un circuit R, L, C série soumis à une tension u sinusoïdale délivrée par un générateur basses fréquences (G.B.F.). Pour cela on observe à l'oscilloscope le déphasage entre les signaux u et i (en fait tension aux bornes de R) tout en balayant en fréquence : lorsque les signaux sont en phase, la fréquence de résonance est atteinte. On dispose deux fréquencemètres en parallèle et on recommence l'expérience N fois : on obtient deux séries de résultats :

	Fréquencemètre n° 1	Fréquencemètre n° 2
fréquences de résonance mesurées en Hz	1592, 1596, 1593, 1591, 1590, 1591, 1591, 1593, 1593, 1591	1582, 1583, 1583, 1580, 1579, 1580, 1581, 1582, 1582, 1581
moyenne en Hz	1592,1	1581,3
écart-type en Hz	1,7	1,3
précision		

Les deux séries de mesure ont la même « précision » (écarts-types voisins) mais on ne peut rien dire de leur justesse (il faudrait disposer d'un fréquencemètre de meilleure qualité qui servirait d'étalon). Remarquons que la différence des deux indications est sensiblement constante et égale à 10 Hz (écart *systématique*) ce qui se retrouve au niveau des moyennes.

4. Expression numérique d'un résultat, chiffres significatifs.

a) Rappel.

Exemple :  $\rho = 0,121 \text{ dag.L}^{-1}$  : 3 chiffres significatifs : les zéros « avant » ne comptent pas,  
 $\rho = 1,210 \text{ g.L}^{-1}$  : 4 chiffres significatifs : les zéros « après » sont significatifs.

b) Supposons que l'étude statistique du 2) conduise au résultat  $L = (3,03 \pm 0,01) \text{ m}$ . Cette écriture montre que :

- Il est absurde d'attribuer à l'incertitude absolue plus d'un seul chiffre significatif.
- Il est indispensable que la mesure et l'incertitude aient le même nombre de chiffres après la virgule.

c) Si l'on n'indique rien, cela suppose que l'incertitude est d'une unité sur le dernier chiffre (on notera alors  $L = 3,03 \text{ m}$ ), d'où l'importance du nombre de chiffres significatifs !

La précision courante en physique est de l'ordre de 5% : tout résultat ne peut comporter que 2 à 3 chiffres significatifs.

5. Evaluation de l'incertitude sur une mesure.

a) Incertitude sur une mesure directe.

Exemple : lecture d'une intensité :

• A l'aide d'un ampèremètre analogique (à aiguille) :

$$\Delta I = \frac{CI_{\max}}{100} \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} C \text{ est la classe notée sur le cadran (typiquement 1 en continu ; 1,5 en alternatif)} \\ I_{\max} \text{ est l'intensité maximale du calibre utilisé} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \frac{\Delta I}{I} = \frac{CI_{\max}}{100.I}$$

pour réduire l'incertitude, absolue ou relative, on a intérêt à *utiliser l'appareil au voisinage du maximum de l'échelle* (pour minimiser  $I_{\max}$ ) : on part du calibre le plus élevé pour ne pas endommager l'appareil, et on diminue progressivement.

Evaluer la précision de la mesure de l'intensité d'un courant alternatif proche de 9 mA sur le calibre 30 mA puis sur le calibre 10 mA.

- A l'aide d'un ampèremètre numérique :

La notion de classe n'a plus de sens, la précision d'une mesure s'évalue en se reportant à la notice de l'appareil (*le nombre de chiffres affichés n'a pas valeur de précision !*).

b) Incertitude sur une mesure indirecte.

- Soit à déterminer une grandeur  $X$  du type  $X = k a^\alpha b^\beta c^\gamma$  par la mesure des grandeurs  $a, b, c$ , supposées indépendantes. L'évaluation de l'incertitude sur  $X$  connaissant celles sur  $a, b$  et  $c$  nécessite le calcul différentiel suivant :

posons  $X = f(a,b,c)$ , alors  $dX = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_{b,c} da + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_{a,c} db + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_{a,b} dc$  (voir le cours de mathématiques)

avec  $\Delta a = |da|, \dots$  et en se plaçant dans le cas le plus défavorable :  $\Delta X = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_{b,c}\right| \Delta a + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_{a,c}\right| \Delta b + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_{a,b}\right| \Delta c$

soit ici : avec  $\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_{b,c} = \alpha k a^{\alpha-1} b^\beta c^\gamma$ ,  $\left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_{a,c} = \beta k a^\alpha b^{\beta-1} c^\gamma$ ,  $\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)_{a,b} = \gamma k a^\alpha b^\beta c^{\gamma-1}$  :

$dX/X = \alpha da/a + \beta db/b + \gamma dc/c$  et  $\Delta X/X = |\alpha \Delta a/a| + |\beta \Delta b/b| + |\gamma \Delta c/c|$

- Exemple : traiter le cas du calcul de la masse volumique  $\rho$  d'un cylindre de métal dont on mesure la masse  $m$ , le diamètre  $D$  et la hauteur  $h$ .

- Pratiquement :

*la précision du résultat ne peut être plus grande que celle des données et c'est la donnée qui comporte le moins de chiffres significatifs qui fixe le nombre de chiffres significatifs du résultat.*

Exemple :

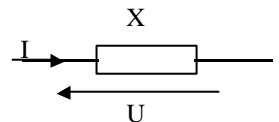
la détermination expérimentale de la masse volumique de l'air vers  $20^\circ \text{C}$  fournit les résultats suivants :  
 $m = 1,82 \text{ g}$  pour  $V = 1,5 \text{ L}$  d'où  $\rho = m/V = 1,2 \text{ g.L}^{-1}$  (1,2133 arrondi à 2 chiffres significatifs).

## 6. Erreurs systématiques.

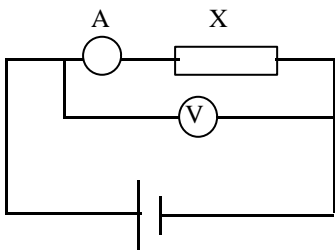
Elles peuvent provenir de la méthode de mesure et s'ajoutent aux erreurs aléatoires.

Exemple : mesure de la résistance d'un conducteur ohmique avec un ampèremètre et un voltmètre.

$U/I = X$  dans le domaine de linéarité ( $I$  pas trop grand).



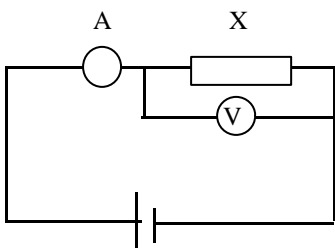
a) Montage en longue dérivation.



Soit  $r_A$  la résistance de l'ampèremètre,  $U$  la valeur donnée par le voltmètre,  $I$  celle lue à l'ampèremètre. Montrer que  $U/I = X + r_A$ .

Le terme correctif  $r_A$  est d'autant plus faible que  $X$  est grand devant  $r_A$  ( $r_A$  de l'ordre de  $100 \Omega$ ), cette méthode est réservée aux mesures de grandes résistances, l'erreur systématique peut alors être négligée devant l'erreur aléatoire.

b) Montage en courte dérivation.



Soit  $r_V$  la résistance du voltmètre,  $U$  la valeur donnée par le voltmètre,  $I$  celle lue à l'ampèremètre. Montrer que  $U/I = X / (1 + X/r_V)$

Le terme correctif  $X/r_V$  est d'autant plus faible que  $X$  est faible devant  $r_V$  ( $r_V$  de l'ordre de  $10^6 \Omega$ ), cette méthode est réservée aux mesures de faibles résistances, l'erreur systématique peut alors être négligée devant l'erreur aléatoire.

### III. Régression linéaire.

Soit à vérifier une loi physique constituant un modèle associé à un domaine de validité. On tentera toujours de se ramener à une relation affine entre deux grandeurs  $x$  et  $y$  (ainsi pour vérifier l'expression de la période d'un pendule élastique horizontal

$T = 2\pi (m/k)^{1/2}$  (avec les notations consacrées) on étudiera par exemple  $y = T^2$  en fonction de  $x = m$  à  $k$  fixé et on vérifiera

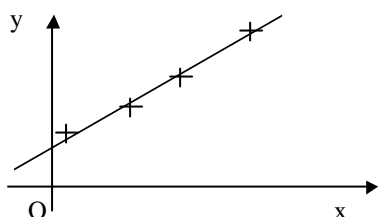
$$y = \frac{4\pi^2}{k} x .$$

Les mesures de  $y$  lorsqu'on fait varier  $x$  conduisent au tableau :

$x_{\text{exp}}$	$x_1$	...	$x_i$	...	$x_N$
$y_{\text{exp}}$	$y_1$	...	$y_i$	...	$y_N$

et on veut résumer l'ensemble en écrivant « le mieux possible »  $y = \alpha x + \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes.

Les valeurs  $x_i$  et  $y_i$  sont connues avec une certaine incertitude (supposée identique) et, en pratique, le tracé du graphe  $y = f(x)$  montre que les points  $\{x_i, y_i\}$  ne sont pas parfaitement alignés.



Comment choisir le coefficient directeur  $\alpha$  et l'ordonnée à l'origine  $\beta$  pour que la relation  $y = \alpha x + \beta$  donne une droite ( $\Delta_{\alpha\beta}$ ) qui passe « le mieux possible » au voisinage de tous les points fournis ?

#### 1. Première méthode.

On porte les points sur un graphe (un couple étant représenté par une petite croix), on trace la droite qui semble passer au mieux par les points expérimentaux (celle qui répartit équitablement les incertitudes de part et d'autre) (voir ci-dessus).

L'ordonnée à l'origine se lit directement. Le coefficient directeur se calcule à l'aide de deux points de la droite (et non pas deux points du tableau) convenablement choisis (suffisamment éloignés et facilement repérables).

2. Deuxième méthode : « droite des moindres carrés » (appellation des physiciens) ou « régression linéaire » (appellation des statisticiens) ou « convergence au sens de la norme de la moyenne quadratique » (appellation des mathématiciens).

Le critère d'optimisation choisi est le suivant : rendre  $S = \frac{1}{N} \sum_i (y_i - f(x_i))^2$  minimum.

Ecrire  $f(x_i) = \alpha x_i + \beta$  ; développer l'expression précédente ; y introduire la notation classique  $\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i$  .

Les « variables » sont ici  $\alpha$  et  $\beta$  puisque toutes les moyennes sont parfaitement connues avec le tableau :  $S(\alpha, \beta)$  est une forme quadratique de  $\alpha$  et  $\beta$ . La condition pour que  $S$  soit minimum est que ses dérivées partielles (par rapport à  $\alpha$  à  $\beta$  fixé et par rapport à  $\beta$  à  $\alpha$  fixé) soient nulles. Exprimer ces conditions :  $\alpha$  et  $\beta$  sont alors calculables à partir des résultats expérimentaux, le problème est terminé.

Les calculettes ont un programme de calcul de  $\alpha$  et  $\beta$ .